Japanischer Mathematiker leistet bahnbrechendes – doch niemand versteht ihn

von Armin P. Barth* — Nordwestschweiz

Zuletzt aktualisiert am 3.2.2016 um 22:39 Uhr

Mochizukis Beweis ist über 500 Seiten lang und basiert auf vorbereitenden Abhandlungen, die selber schon über 500 Seiten lang sind.

Der Japaner Shin Mochizuki hat eines der grössten Zahlenrätsel gelöst – oder doch nicht?

Ich habe nie bereut, Mathematiker geworden zu sein. Mathematikerinnen und Mathematiker erproben und überprüfen Argumente. Sie suchen nach wirklich überzeugenden Argumenten für Sachverhalte und decken falsche Argumente schonungslos auf. Ist ein mathematischer Sachverhalt überzeugend und unwiderlegbar begründet, so sagt man, er sei bewiesen.

Worum geht es bei der abc-Vermutung?

Betrachten wir zwei teilerfremde positive Zahlen, etwa a = 9 und b = 26. Während die erste Zahl einzig den Primfaktor 3 hat, hat die zweite Zahl die Primfaktoren 2 und 13. Dass sie keinen gemeinsamen Primfaktor haben, zeigt ja gerade, dass sie teilerfremd sind. Nun bilden wir die Summe c beider Zahlen: c = a + b = 35. Diese neue Zahl hat die beiden Primfaktoren 5 und 7. Wenn man nun jeden Primfaktor der drei Zahlen a, b, c genau einmal nimmt und alle miteinander multipliziert, erhält man das Radikal, in diesem Fall 2•3•5•7•13 = 2730. Offenbar ist das Radikal grösser als c. Das ist aber nicht immer so. Im Beispiel a = 5, b = 27, c = 32 wäre das Radikal gleich 30, also kleiner als c. Die abc-Vermutung handelt davon, ob und wie oft das Radikal grösser oder kleiner ist als die Zahl c. Präzise lautet sie so: Für jede reelle Zahl □ε > 0 existiert eine positive reelle Konstante K, so dass c ≤ K • (Rad(abc))1+εε

Als besonders faszinierend habe ich immer diese unumstössliche Sicherheit der mathematischen Aussagen empfunden. Der Satz des Pythagoras oder die Tatsache, dass im ebenen Dreieck die Winkelsumme 180 Grad beträgt, ist heute genauso wahr wie vor zweitausend Jahren. Einmal bewiesene Aussagen bleiben wahr ganz unabhängig von Zeit oder Wissensstand. Welche andere Wissenschaft könnte das von sich behaupten!

Der japanische Mathematiker Shin Mochizuki hat kürzlich behauptet, die sogenannte abc-Vermutung bewiesen zu haben. Dabei handelt es sich um eine recht gut verständliche, aber bisher unbewiesene Vermutung aus der Zahlentheorie, die 1985 von Joseph Oesterlé und David Masser aufgestellt worden ist (siehe Box). Ein Beweis dieser Vermutung wäre eine Sensation, weil damit zahlreiche weitere teils ungelöste Probleme der Zahlentheorie gelöst wären. Insbesondere wüsste man endlich mehr über Primzahlen. Nun würde man denken, dass sich leicht überprüfen lässt, ob Mochizuki recht hat oder nicht. Man muss ja nur seinen Beweis lesen. Hat er die Vermutung tatsächlich bewiesen, wie er behauptet? Leider ist das sehr schwer zu sagen. Um das zu verstehen, sollte man sich vor Augen führen, was ein Beweis genau ist.

Über 500 Seiten für einen Beweis

Ein mathematischer Beweis ist eine Kette unumstösslicher und schlüssig ineinandergreifender Argumente, die den behaupteten Sachverhalt erklären. Dabei dürfen die Argumente die Leserinnen und Leser nicht einfach nur dazu überreden, die Aussage zu glauben, sondern sie müssen, um eine Forderung von Pierre de Fermat anzuführen, erzwingen, dass man sie glaubt. Darum lässt man als Argumente nur bereits früher bewiesene Sachverhalte gelten und Axiome.

Auf diese Weise wächst das Hochhaus des mathematischen Wissens seit über zweitausend Jahren rapide in die Höhe und in die Breite. Jeder neu bewiesene Sachverhalt gründet auf oft zahlreichen früher einmal bewiesenen Sachverhalten. Beispielsweise kann man ja den Satz des Pythagoras, ist dieser einmal streng bewiesen, heranziehen, um damit neue Sätze zu beweisen. Auf diese Weise steht jede neue Etage felsenfest, weil sie nur auf Sätzen gründet, die schon früher streng bewiesen worden sind.

Oft sind mathematische Beweise recht kurz. Alle an Schulen gelehrten Beweise sind etwa zwischen einer Zeile und einer Seite lang. Dass es unendlich viele Primzahlen gibt, kann man beispielsweise in wenigen Zeilen nachweisen. Und auch wenn solche Beweise sich nicht so mühelos lesen lassen wie eine Seite in einem Kriminalroman, so kann man sie doch in relativ kurzer Zeit gut nachvollziehen – das entsprechende Vorwissen vorausgesetzt.

Aber je komplexer die mathematische Aussage ist, desto länger und schwieriger können auch die Beweise werden. Die Lektüre eines neuen und schwierigen Beweises setzt viel Zeit voraus und zudem viel Spezialwissen, sollte man doch all die unter Umständen zahlreichen Theorien und Sätze, auf die der aktuelle Beweis zugreift, kennen und verstehen. Man muss sozusagen mit den darunterliegenden Etagen in aller Tiefe und Breite vertraut sein, um die Bauweise der neuen Etage nachvollziehen zu können.

Und genau hier ist das Problem: Mochizukis Beweis ist über 500 Seiten lang und basiert auf vorbereitenden Abhandlungen, die selber schon über 500 Seiten lang sind. Zudem verwendet er eine ganz neue und eigens von ihm entwickelte Theorie mit unzähligen neuen Fachbegriffen, die «inter-universale Teichmüller-Theorie» (IUTeich), die bis heute praktisch kein Mensch versteht.

Es ist, als hätte er dem Hochhaus ganz allein einen weiteren Flügel angebaut und diesen dann in die Höhe getrieben. Es wird geschätzt, dass Experten, die den Beweis überprüfen könnten, mindestens ein halbes Jahr dafür investieren müssten – Vollzeit.

Mathematik des 22. Jahrhunderts

Darum befindet sich die mathematische Welt aktuell in der merkwürdigen Situation, dass vielleicht eine der berühmtesten Vermutungen endlich bewiesen ist, dass aber niemand das Wissen und die Zeit hat, das zu überprüfen. Ein Kenner der Szene meinte kürzlich, dass IUTeich vielleicht ein Stück Mathematik des 22. Jahrhunderts sei, das aus Versehen ins 21. Jahrhundert gefallen ist.

Immerhin schreibt jetzt Go Yamashita, eine weiterer japanischer Mathematiker, der den ganzen Beweis Zeile für Zeile studiert hat, einen Überblick von 200 bis 300 Seiten Länge, der den Monsterbeweis verständlicher machen soll. Und er wird im März einen Workshop an der Kyushu-Universität halten, der hoffentlich Klärung bringen wird. Mindestens bis dahin hängen wir aber weiterhin in der Luft. Der schiere Aufwand und die unvorstellbare Komplexität des Beweises machen eine Überprüfung fast unmöglich.

Armin P. Barth ist Mathematiker, Gymnasiallehrer und Kolumnist der «Nordwestschweiz».

Verwandtes Thema: